Die Auflösung von Singularitäten

Herwig HAUSER

Ein jeder kann sich unter dem Begriff *Fläche* etwas vorstellen: Die Eierschale, der Spiegel eines Sees, ein blendend weisser Schneehang, die Seitenfläche eines Würfels, der Mantel eines Kegels. Gemeinsam ist allen ihre zwei-dimensionale Ausbreitung in einem umgebenden dreidimensionalen Raum. Eine kleine Ameise, die auf der Fläche krabbelt, kann sich auf ihr nach vorne, hinten und seitlich bewegen. Sie kann aber nicht von der Fläche in die Höhe springen (im Gegensatz etwa zur Spezies Floh). Man sagt, sie hat zwei Freiheitsgrade der Bewegung. Damit sind zwei verschiedene (z.B. aufeinander senkrecht stehende) Richtungen v und w gemeint, und jede andere eingeschlagene Richtung lässt sich realisieren, indem man ein Stück weit in Richtung von v und anschliessend ein Stück weit in Richtung von w geht. Auf der Erde werden solche Richtungen beispielsweise durch Längen- und Breitenkreise vorgegeben. Wir erreichen vom Ausgangspunkt aus jeden anderen Punkt, indem wir für eine gewisse Zeit zuerst dem Längenkreis, dann dem Breitenkreis folgen. Das ist zwar im allgemeinen nicht ökonomisch, indessen im klassischen Beispiel des Taxifahrers in Manhattan, der dem Strassenraster folgen muss, nicht vermeidbar.

Wenn Mathematiker von einer *algebraischen Fläche* sprechen, meinen sie etwas ganz Bestimmtes, eindeutig Festgelegtes. Wie überhaupt die Objekte der Mathematik zweifelsfrei und kristallklar definiert sein müssen, um darüber reden zu können und zu dürfen. Vokabeln wie *Gemütlichkeit* oder *umständehalber* oder *argwöhnen* erlauben auf Grund ihres Interpretationsspielraums keinen mathematischen Dialog, jedenfalls nicht, ohne sie weiter zu spezifizieren.

Nun, was ist eine algebraische Fläche? Per definitionem, also per Festsetzung, versteht man darunter die Lösungsmenge einer polynomialen Gleichung in drei Unbestimmten oder Variablen. Wir wollen hier nicht das Konzept des Polynoms und der Variablen definieren. Wir begnügen uns stattdessen mit Beispielen: $x + y + 2z = 1$, oder $7x^2 = y^2z^3$ oder $\frac{1}{2}xyz - x^3 = 4yz^4$. Die Variablen sind hier x, y und z, die Zahlen, die davor stehen (1, 2, 7, $\frac{1}{2}$ und 4) heissen die Koeffizienten, die Zahlen in kleiner Schrift rechts oberhalb der Variablen wie in x^2 sind die Exponenten. Einfache Gleichungen, wo alle Exponenten 1 sind, werden schon in der Schule behandelt, und heissen lineare Gleichungen. Entsprechend gibt es dann quadratische und kubische Gleichungen, also Gleichungen vom Grad 2 und 3, etc.

Die Lösungen einer Gleichung sind alle Tripel von Zahlen (a, b, c), die, wenn sie statt der Variablen x, y und z in die Gleichung eingesetzt werden, die Gleichung lösen. Das heisst, nach dem Einsetzen der Zahlen und Ausrechnen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens muss links und rechts die gleiche Zahl herauskommen. Zum Beispiel sind bei der ersten Gleichung

$(1, 1, -1/2)$ und bei der zweiten Gleichung $(0, 0, c)$ für eine beliebige Zahl c Lösungen.

Bei den meisten Gleichungen in drei Variablen ist die Lösungsmenge – die Zusammenschau aller Lösungen – ein zweidimensionales Gebilde. Dann spricht man von einer algebraischen Fläche. Nur manchmal kann ein Freiheitsgrad verloren gehen, und die Lösungsmenge ist bloss eine Kurve, oder besteht gar nur aus vereinzelten Punkten. So hat die Gleichung $x^2+y^2+z^2 = 0$ eine einzige Lösung, den Nullpunkt $(0, 0, 0)$, denn eine Summe von Quadraten kann nur Null ergeben, wenn alle Summanden schon Null sind (ein Quadrat ist nie negativ). Hingegen hat die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ keine Lösung. Hier betrachten wir immer *reelle* Lösungen. Man kann aber den Zahlbereich durch Hinzunahme der imaginären Einheit i (mit der charakterisierenden Eigenschaft $i^2 = -1$) zu den komplexen Zahlen erweitern. Dort haben beide Gleichungen eine (zwei-dimensionale) Schar von Lösungen. Beim Rechnen im Komplexen gehen keine Freiheitsgrade verloren, das macht viele Überlegungen einfacher.

Die Gleichung $z = x^2 + y^2$ ist ein schönes Beispiel. Ihre Lösungsmenge ist das sogenannte Drehparaboloid. Um diese Gleichung zu lösen, können wir x und y frei wählen, für jeden gewählten Wert von x und y ergibt sich genau ein Wert für z. Etwas geometrischer ausgedrückt bedeutet dies: Wir wählen einen Punkt in der Ebene (mit Koordinaten (x, y)) und tragen vertikal darüber die Höhe $z = x^2 + y^2$ ab. Durch dieses Verfahren erhält man die Punkte einer Fläche im Raum, die sozusagen über der Ebene schwebt. Man spricht vom *Graphen* der Funktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Bild 1: Drehparaboloid

Das Lösen von Gleichungen war seit jeher ein zentrales Problem der Mathematik. Das Drehparaboloid ist ein einfacher Fall, weil die Variable z explizit auf der einen Seite der Gleichung steht. Diese günstige Konstellation tritt sehr selten auf, meistens sind die Variablen so miteinander verschachtelt, dass man die Lösung nicht mehr direkt ablesen kann. Modifizieren wir die Gleichung zu $z^3 = x^2+y^2$, so müssen wir zur Berechnung von z aus den Werten von x und y die dritte Wurzel aus $x^2 + y^2$ ziehen. Sie ist eindeutig, sofern man nur reelle Lösungen erlaubt, aber sobald wir uns in den Bereich der komplexen Zahlen begeben, gibt es drei Lösungen. Das ist schon etwas subtiler.

Wie schnell das kompliziert und undurchschaubar wird, erkennt man an den Gleichungen $z + z^3 = x^2 + y^2$ oder $z^3 = x^2y + y^2z^4$. Bei ersterer stehen alle z auf einer Seite, ihre wertemässige Bestimmung erfordert nun die Lösung einer Gleichung dritten Grades. Bei der zweiten Gleichung taucht z auf beiden Seiten und in Verbindung mit y auf. Darum könnte es günstiger erscheinen, die Gleichung nach x zu lösen, etwa $x = \frac{1}{y}(z^3 - y^2z^4)$ (sofern y nicht 0 ist).

Die Hoffnung, durch geschicktes Manipulieren mit der Gleichung eine Variable freistellen zu können, überlebt nur kurz. Es genügt, die Gleichung

$$x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 = xyz$$

zu betrachten, um das Unterfangen als aussichtslos zu erkennen. Probieren und Basteln bringt hier nichts mehr, wenn man die Gleichung wirklich lösen will. Wobei hier unter dem Begriff *Lösen* verstanden wird, eine Variable als Funktion der beiden anderen darzustellen. Auch andere Lösbarkeitsdefinitionen wären denkbar, sollen hier aber vorderhand nicht berücksichtigt werden. In jedem Fall scheint eine allgemeine Prozedur des Lösens auf den ersten Blick unerreichbar.

Ungeachtet dieser Schwierigkeiten ist es immer wieder notwendig, die Lösungen von Gleichungen auszurechnen, oder zumindest die Gestalt der gesamten Lösungsmenge zu beschreiben. Unzählige Phänomene und Prozesse in Natur, Technik und unserer Alltagswelt werden durch algebraische Gleichungen beschrieben (und viele mehr durch Differentialgleichungen, die hier nicht besprochen werden). Die Kenntnis der Lösungsmenge ist der erste Schritt zum Verstehen der Phänomene.

Hier setzen nun die mathematische Sprache und Theorie an. Das Problem wird präzisiert und modelliert, die Aufgabenstellung "Lösen" genau definiert, um überhaupt Antworten systematisch suchen zu können. Das Lösen von algebraischen Gleichungen kann, wie erwähnt, auf verschiedene Arten angegangen werden, hier stellen wir eine sehr allgemeine und umfassende Begriffsbildung vor, die *Auflösung der Singularitäten algebraischer Varietäten*. Sie liefert eine ganz detaillierte Beschreibung der Lösungsmenge der Gleichung, als Gegenleistung dafür ist sie meistens nur mit grossem rechnerischen Aufwand zu erhalten.

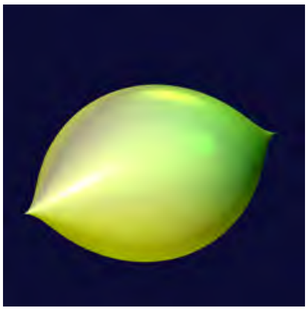
Nachdem sich dieser Text an ein nicht-mathematisch vorgebildetes Publikum richtet, können wir nur durch Bilder und Vergleiche eine Gefühl vermitteln, worin die Auflösung der Singularitäten besteht. Eine exakte, saubere Definition ist in dem gegebenen Rahmen nicht möglich.

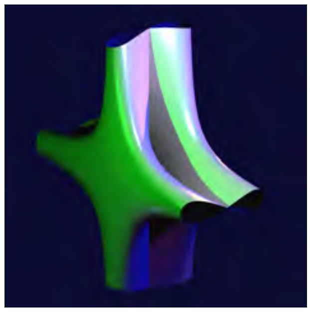
Wir unterscheiden zuerst einmal zwischen glatten Flächen und solchen mit singulären Punkten. Die meisten der algebraischen Flächen weisen besondere Punkte oder Kurven auf, an denen sie nicht glatt sind wie ein Babypopo sondern scharf und kantig wie die Schneide eines Taschenfeitels oder die Spitze einer Pipette. Diese einzigartigen Punkte nennt man *Singularitäten*. Gerade dort ist die Geometrie der Flächen besonders spannend und aufschlussreich.

Im Allgemeinen lässt sich die Bildung von Singularitäten nicht vermeiden. Der Schatten einer glatten Raumkurve bei Projektion auf eine Leinwand kann Selbstschnitte aufweisen oder sogar Punkte, in denen er spitz zusammenläuft.

Bild 2: Schatten einer Raumkurve mit Selbstschnitt.

Die Konstellationen von Singularitäten vervielfältigen sich beim Übergang zu höheren Dimensionen, beispielsweise Flächen. Schon die Klassifikation von Flächensingularitäten ist nur für die einfachsten Fälle möglich. Die folgenden Bilder geben einen kleinen Eindruck von den Phänomenen, die auftreten können.





Bilder 3, 4 und 5: Singuläre Flächen Zitrus, Daisy und Helix.

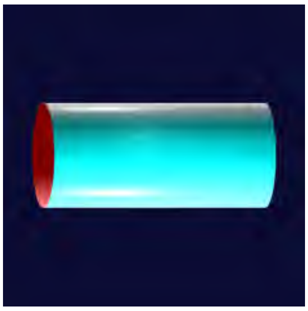
Glatte Flächen können bereits eine recht komplizierte (globale) Geometrie besitzen, man stelle sich nur die Innenfläche eines mehrfach verknoteten Schlauches vor, dessen Enden miteinander verbunden sind. Lokal sehen glatte Flächen aber immer gleich aus, nämlich wie ein Blatt Papier, eventuell noch etwas gekrümmt. Man kann relativ leicht feststellen, welche Gleichungen als Lösungsmenge glatte Flächen liefern. Es genügt im wesentlichen, die Gleichung nach allen Variablen abzuleiten. Für glatte Flächen gibt es recht effiziente Verfahren, alle Lösungen in der Nähe einer gegebenen (d.h., bereits berechneten) Lösung auszurechnen. Der Grund ist, dass man für glatte Flächen in der Gleichung eine Variable freistellen und auf eine Seite bringen kann, sodass ihr Wert eine Funktion der anderen beiden Variablen wird. Dieses Verfahren ist allerdings nur lokal möglich. Das Freistellen der Variable erfolgt in genügend kleinen Wertebereichen, für andere Bereiche muss unter Umständen eine andere Variable mit anderer Rechnung freigestellt werden.

In der Auflösung der Singularitäten wird der Fall der glatten Flächen als *gelöst* betrachtet und nicht weiter untersucht. Das Ziel ist vielmehr, eine Fläche mit Singularitäten durch einen systematischen Prozess in eine glatte Fläche überzuführen. Das allein ist schon sehr spannend, sehr schwierig, und kann sowohl geometrisch (durch Konstruktionen mit der gegebenen Fläche) als auch algebraisch (durch Manipulationen mit der Gleichung) erfolgen.

Um das Prinzp zu erläutern, gehen wir umgekehrt vor. Wir nehmen eine glatte Fläche und produzieren daraus eine Fläche mit Singularitäten, indem wir sie geeignet projizieren. Die

Reversion dieses Prozesses entspricht dann der Auflösung.

Betrachte den Zylinder (genauer: den Zylindermantel) mit Gleichung $y^2 + z^2 = 1$. Sein Schnitt mit einer vertikalen Ebene ist eine Kreislinie. Ziehen wir eine dieser Kreislinien auf einen Punkt zusammen, und verkleinern wir die benachbarten Kreislinien, indem wir den Radius mit einer kleinen Zahl multiplizieren, so erhalten wir den Doppelkegel.



Bilder 6 und 7: Zylinder und Kegel.

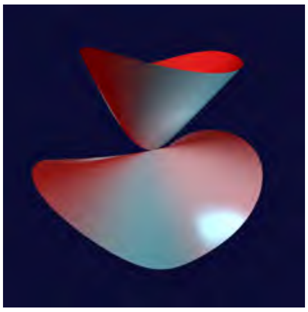
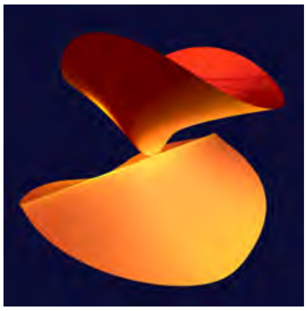
Algebraisch entspricht diese Kontraktion der Abbildung $(x, y, z) \to (x, xy, xz)$. Einsetzen in die Gleichung $x^2 = y^2 + z^2$ des Kegels liefert $x^2 = x^2y^2 + x^2z^2$, aus der wir x^2 durchkürzen können (sofern x nicht 0 ist, was wir hier grosszügigerweise annehmen wollen, und was auch mathematisch begründbar ist). Wir erhalten die Zylindergleichung $1 = y^2 + z^2$.

Neugierig geworden wiederholen wir diesen Vorgang der Kontraktion. Dazu muessen wir die umgekehrte Abbildung $(x, y, z) \to (x, y/x, z/x)$ in die Kegelgleichung einsetzen und Nenner wegmultiplizieren. Das Ergebnis ist die Gleichung $x^4 = y^2 + z^2$. Die zugehörige Fläche heisst Fidibus.

Bild 8: Die Fläche Fidibus.

Die Singularität im Punkt des Zusammentreffens der beiden trichterförmigen Teile rechts und links ist wesentlich spitzer geworden. Die Fläche Fidibus ist eine zweifach ausgeführte Kontraktion des Zylindermantels.

Man kann diesen Prozess sowohl iterieren als auch auf andere glatte Flächen anwenden, wobei die Wahl der Kontraktion (die wir ja gar nicht präzise definiert haben) noch einen weiten Spielraum zulässt. Beispielsweise liefert die Anwendung der Abbildung $(x, y, z) \to 2 \cdot (yz, y, xy + y^2)$ auf den Doppelkegel die Fläche *Calypso* mit Gleichung $x^2 + y^2z = z^2$, aus der durch $(x, y, z) \to (xz, y, z)$ die Fläche Calyx mit Gleichung $x^2 + y^2z^3 = z^4$ ensteht. (Beachte hier, dass zum Überprüfen der Richtigkeit der Rechnung die Komponenten der jeweiligen Abbildung in die Gleichung der *resultierenden* Fläche – nicht der ursprünglichen – eingesetzt werden müssen.)

Bilder 9 und 10: Calypso und Calyx.

Die oben angesprochenen und nur vage definierten Kontraktionen können mathematisch dingfest gemacht werden. Der umgekehrte Vorgang, das heisst, dass *Aufreissen* einer Fläche, heisst Explosion, Aufblasung oder, auf englisch, Blowup. Der Doppelkegel wird in seiner Spitze aufgerissen und hierauf neu verklebt, um den Zylindermantel zu erhalten.

Geometrisch lässt sich diese Konstruktion am besten für Kurven erläutern. Wir betrachten eine Spiralkurve in der Ebene, die sich um den Nullpunkt windet. Darüber stellen wir einen Kegel (genauer: einen einfachen Kegel), dessen Spitze genau über dem Nullpunkt liegt. Nun beleuchten wir die Spirale von unten, wobei die Lichtquelle genügend weit entfernt sei, um annähernd parallele Strahlen zu erzeugen. Der Schatten der Spirale auf dem Kegelmantel ist eine Raumkurve, die sich spiralig hochwindet und sich dabei der Kegelspitze nähert. Wir haben die ebene Spirale räumlich hochgezogen (Explosion). Umgekehrt liefert die Projektion der spiraligen Raumkurve auf die Ebene wieder die ebene Spirale (Kontraktion).

Derselbe Prozess kann auf eine ebene Schleife angewandt werden, indem man über sie einen Zylinder stellt. Das vertikale Auseinanderziehen der Kurve trennt ihre beiden Äste.

Für die spitze Kurve $x^3 = y^2$, die Neil'sche Parabel, ist die Konstruktion schon etwas heikler, man stellt über sie eine Wendeltreppenfläche und zieht die Kurve auf diese hoch.

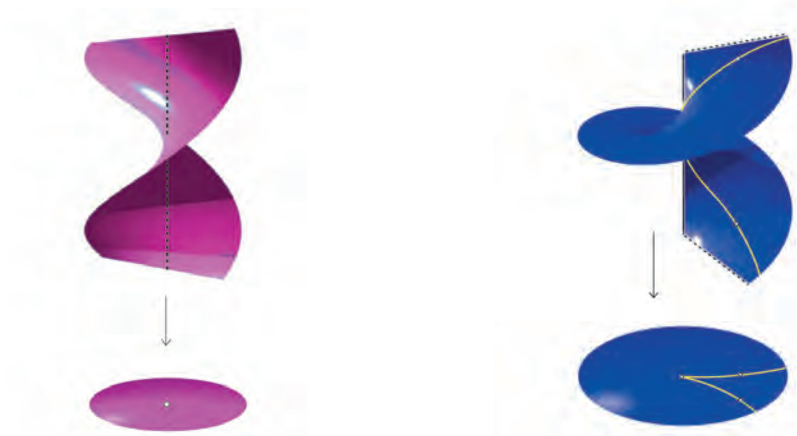


Bild 11: Explosion der Ebene und Hochziehen einer spitzen Kurve.

Die zugrundeliegende Idee ist immer die gleiche: Einen Knoten löst man, indem man leicht in verschiedene Richtungen zieht und ihn dadurch lockert. Eine Singularität löst man auf, indem man die Kurve oder Fläche in einen höher-dimensionalen Raum legt und dort auseinanderzieht (wieder sind wir höchst unpräzise, aber wir werden dies akzeptieren und eher heuristisch raisonnieren). Für Kurven haben wir das gerade an drei Beispielen gesehen, die umgebende Ebene wird ersetzt durch den drei-dimensionalen Raum, und die Kurve wird in die neue, zusätzliche Richtung auseinandergezogen. Für Flächen im Raum muss man schon mindestens in Dimension vier gehen, was für den Mathematiker zwar kein Problem ist, allerdings die anschauliche Wiedergabe versagt.

Es ist interessant zu bemerken, dass der Prozess des Auseinanderziehens der ebenen Spiralkurve in einer "mathematischen" Arbeit von Albrecht Dürer (seiner einzigen, aus dem Jahr 1538) vorkommt und diskutiert wird. Siehe dazu den Artikel von H. Staigmüller im Programm des Königlichen Realgymnasiums in Stuttgart aus dem Jahr 1890/91.[1]

So einfach diese Konstruktionen anmuten, so verzwickt ist ihre Anwendung. Zum einen gibt es viele Möglichkeiten, eine Fläche auseinanderzuziehen, und jede verändert sie in einer anderen Weise: manchmal bleiben die Singularitäten gleich, dann werden sie einfacher oder verschwinden überhaupt, dann wieder werden sie schlimmer. Der Mathematiker und Geometer muss also herausfinden, welche *Modifikation* in jeder Situation gerade die günstigste ist und die Singularitäten am meisten vereinfacht. Wobei gar nicht klar ist, wann eine Singularität *einfacher* als eine andere ist, auch das muss erst präzisiert werden. Zudem produziert das Auseinanderziehen im allgemeinen nicht in einem Schritt glatte Flächen. Wieder werden Singularitäten auftreten.

Die Kunst ist es nun, ein Mass der Komplexität von singulären Punkten zu definieren. Im wesentlichen wird dies eine positive Zahl sein, und je grösser ihr Wert, umso komplizierter die Singularität. Der kleinste mögliche Wert 1 entspricht dabei einem glatten Punkt. Weiters bestimmt man für jede Fläche, ich wiederhole – jede –, genau eine Modifikation durch Auseinanderziehen. Für diese Modifikation ist dann zu zeigen, dass die Komplexität aller Singularitäten der neu resultierenden Fläche kleiner wird, das heisst also, dass das Maximum der zugehörigen Zahlen in den singulären Punkten abnimmt. Damit ist man fertig: Die Zahl kann nur endlich oft fallen, irgendwann muss sie den Wert 1 erreichen. Dann ist die entsprechende Fläche glatt.

Dieses Rezept ist das tatsächlich angewandte. Die Definition des Komplexitätsmasses ist äusserst aufwendig, da viele, viele geometrische und algebraische Aspekte in Rechnung gestellt werden müssen. Und sie müssen *gleichgewichtig* in die Zahl einfliessen. Es ist wie in der Lagune von Venedig: Wird ein Pfahl verändert, um eine Absenkung zu revidieren, sinkt das Niveau an anderer Stelle ab oder hebt sich, und die dortige Korrektur zieht wieder anderorts Veränderungen mit sich. Bis alles wieder im Gleichgewicht ist, braucht es viel Fingerspitzengefühl.

[1]Der Autor ist dem Kunsthistoriker Prof. Paul von Naredi-Rainer für den Hinweis und die Reproduktion des Artikels dankbar.

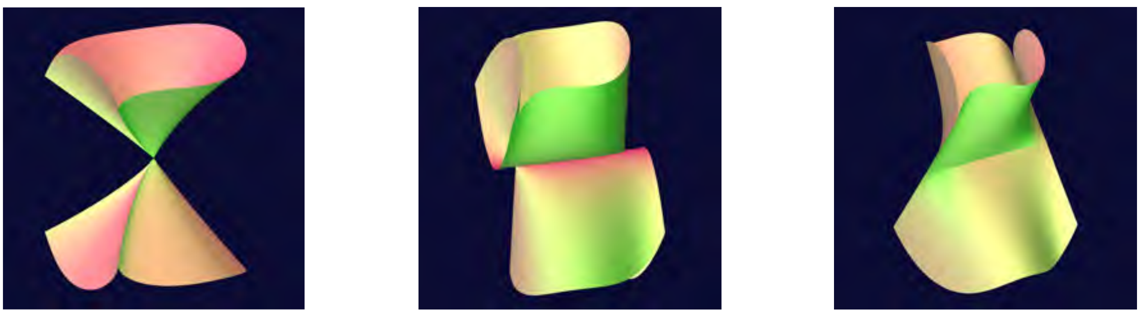
1964 wurde erstmals die Auflösung der Singularitäten von algebraischen Varietäten über Körpern der Charakteristik Null bewiesen. Eine Varietät ist die Verallgemeinerung einer Fläche auf beliebige Dimensionen. Der Zusatz Charakteristik Null bedeutet im wesentlichen, dass über dem Körper der komplexen Zahlen gerechnet wird (das ist am einfachsten). Über Körpern positiver Charakteristik ist die Auflösung heute, über vierzig Jahre später, ein noch immer ungelöstes Problem, an dem viele Mathematiker sich die Zähne ausbeissen.

Der Beweis von 1964 stammt von einem japanischen Mathematiker, Heisuke Hironaka, und ist über zweihundert Seiten lang. Beides, Resultat und Beweis, waren und sind überaus spektakulär. Hironaka erhielt 1970 für seine Arbeit die Fields-Medaille, die begehrteste mathematische Auszeichnung, ähnlich dem Nobel-Preis. Sie wird aber nur alle vier Jahre vergeben. Der Beweis galt damals als einer der schwersten der Mathematik überhaupt.

Bild 12: Heisuke Hironaka 2004 in Tordesillas.

In den letzten Jahren wurde Hironaka's Beweis vereinfacht, verkürzt und transparenter gemacht. Die Faszination ist geblieben. Ein unglaublich ästhetisches Gebilde an Implikationen, Induktionen und Konstruktionen fügt sich zu einem harmonischen Ganzen, das schlagkräftig genug ist, die Auflösung aller möglichen Singularitäten in einem Beweis sicher zu stellen.

Wie schwierig die Sache ist, zeigt sich am Versuch, die Auflösungsprozedur in Computerprogrammen zu implementieren. Dies ist erstmals Bodnár und Schicho um 2000 gelungen. Doch die Vorgangsweise ist so kompliziert (sie muss so kompliziert sein), dass das tatsächliche Ausrechnen schon in relativ einfachen Beispielen die Kapazität der verfügbaren Hardware bei weitem sprengt. Oder der Output wird so voluminös – Dutzende von Seiten – dass er nicht mehr sinnvoll weiterverarbeitet werden kann, um die die gewünschten Informationen zu extrahieren.



Bilder 13, 14 und 15: Die ersten Schritte der Auflösung der Fläche Daisy.

Zum Abschluss eine philosophisch angehauchte Feststellung. Am Beispiel der Auflösung der Singularitäten zeigt sich die vielseitige Motivation der Mathematiker: Man will ein Problem knacken, um wirklich etwas ausrechnen zu können, in diesem Fall, um Gleichungen zu lösen. Gleichzeitig ist die Fragestellung so komplex und tiefgründig, dass, unabhängig von der tatsächlichen Berechenbarkeit, die Auseinandersetzung allein mit dem Problem eine grosse Herausforderung und einen unwiderstehlichen Reiz darstellt. Die Neugier ist hier eine wesentliche Triebfeder. Angesteckt von dieser Faszination beginnt man damit, sich die nötigen Techniken anzueignen, die vorhandene Literatur zu sondieren. Schon bald erkennt man, dass wechselweise verschiedene Methoden eingesetzt werden müssen: geometrische Überlegungen wechseln sich ab mit algebraischen Konstruktionen, logische Abhängigkeiten müssen eruiert werden, Beweisteile entworfen, verworfen und neu erstellt werden.

Erstaunlicherweise, und das wissen die wenigsten Menschen ausserhalb der Mathematik, gehen die Mathematiker nur in der Endausarbeitung analytisch-logisch vor. Zu Beginn sind manche Probleme so vielschichtig und undurchsichtig, dass eine systematische Vorgangsweise gar nicht möglich ist. Viel wichtiger ist die mathematische Intuition, das "Zusammenfühlen" aller beteiligten Komponenten, und ein guter "Geruchsinn". Dieser leitet oft besser als die Gedankenfäden einer durchgrübelten Nacht. Die meisten Einsichten kommen spontan, so als ob das Gehirn, der menschliche Intellekt, am liebsten für sich alleine suchen, ordnen, beobachten, und erst wenn sie fündig geworden sind, dies dem Bewusstsein, der Ratio mitteilen. Doch dies führt uns aus dem Kontext dieses kleinen Exkurses über Singularitäten hinaus, ein guter Grund, die Ausführungen zu beenden.

Herwig Hauser
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
www.hh.hauser.cc
herwig.hauser@univie.ac.at